Freie Universität Berlin

Diplomarbeit
am Institut für Mathematik

Banachräume mit numerischem Index Eins

Nachtrag (2017): Fehlerhafte Rechung zu Beispiel 2.10 korrigiert

Elias Pipping

6. April 2010

Betreut von Prof. Dr. Dirk Werner

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Berlin, den 6. April 2010

Übersicht

In der vorliegenden Arbeit werden die Strukturen und Resultate analysiert, die die Welt der Banachräume mit numerischem Index Eins bestimmen. Das besondere Augenmerk liegt dabei auf üppigen Räumen.

Im ersten Kapitel werden für diesen Themenkreis relevante Begriffe präsentiert, miteinander in Verbindung gebracht und motiviert. Im zweiten Kapitel wird die Üppigkeit benutzt, um einen Banachraum zu konstruieren, dessen Dualraum einen strikt kleineren numerischen Index hat — ein Beispiel, durch das 2007 eine zuvor jahrzehntelang offene Frage beantwortet wurde. Hier wird auch auf die Frage eingegangen, ob es sich bei dem dafür geprägten Üppigkeitsbegriff um eine Umformulierung bekannter Eigenschaften handelt. Im dritten Kapitel schließlich zeigt der Autor selbstständig, wie sich Üppigkeit auf L- und M-Struktur überträgt.

Notation

Die Notation in dieser Arbeit stimmt mit jener von Werner (2007) überein.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Der numerische Radius

Toeplitz definiert (1918) den numerischen Wertebereich (engl. «numerical range») einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ als

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle \colon \langle x, x\rangle = 1,\, x \in \mathbb{K}^n\}.$$

Natürlich lässt sich in der gleichen Sprache auch der numerische Wertebereich für Operatoren auf einem allgemeinen Hilbertraum ausdrücken. In den 1960er Jahren übertragen Lumer (1961) und Bauer (1962) dieses Konzept überdies auf Räume ohne Skalarprodukt. Lumer führt dazu semi-innere Produkte auf normierten Räumen ein; wir folgen Bauer, der ohne diese auskommt, und nennen für Operatoren T auf einem Banachraum X

$$V(T) = \{x'(Tx) \colon x'(x) = 1,\, x \in S_X,\, x' \in S_{X'}\} \quad \text{und} \quad v(T) = \sup\{|\lambda| \colon \lambda \in V(T)\}$$

den numerischen Wertebereich bzw. -radius. Im Hilbertraumfall lässt sich ein Funktional $x' \in S_{X'}$ nach dem Riesz'schen Darstellungssatz als Skalarprodukt $\langle \hat{x}, \cdot\rangle$ mit einem normgleichen Vektor $\hat{x} \in X$ auffassen; vermöge der strikten Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt dann aus $1 = x'(x) = \langle \hat{x}, x\rangle = \|\hat{x}\|\|x\|$ schon $x = \hat{x}$, so dass hier beide Definitionen übereinstimmen.

Erstaunlicherweise lässt sich die Ausdehnung des numerischen Wertebereichs entlang der reellen Achse auch als rechtsseitiges Gâteaux-Differential der Operatornorm ausdrücken.

Theorem 1.1 (Lumer (1961, Lemma 12))**.** *Sei X ein Banachraum und $T \in L(X)$ beliebiger Operator. Dann ist*

$$\sup \operatorname{Re} V(T) = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\|\mathrm{id} + \alpha T\| - 1}{\alpha}. \tag{1.1}$$

Beweis. Sei $\alpha > 0$ mit $\alpha\|T\| < 1$ beliebig, die Existenz von $F(\alpha) \coloneqq (\mathrm{id} + \alpha T)^{-1}$ als Neumannsche Reihe also garantiert. Wir beobachten

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= (\mathrm{id}^2 - \alpha^2 T^2 + \alpha^2 T^2) F(\alpha) \\ &= \big((\mathrm{id} - \alpha T)(\mathrm{id} + \alpha T) + \alpha^2 T^2\big) F(\alpha) \\ &= (\mathrm{id} - \alpha T) + \alpha^2 T^2 F(\alpha); \end{aligned}$$

wegen $\lim_{\alpha\to 0^+}\|F(\alpha)\| = 1$ gilt folglich

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\|F(\alpha)\|-1}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\|\mathrm{id}-\alpha T\|-1}{\alpha},$$

wobei der Grenzwert rechter Hand nach Deimling (1985, Example 7.7) existiert. Seien nun $x \in S_X$ und $x' \in S_{X'}$ mit $x'(x) = 1$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|(\mathrm{id}+\alpha T)x\| &\geq |1+\alpha x'(Tx)| \\
&= \sqrt{\big(1+\alpha x'(Tx)\big)\big(1+\alpha\overline{x'(Tx)}\big)} \\
&= \sqrt{1+2\alpha\operatorname{Re}x'(Tx)+\alpha^2|x'(Tx)|^2} \\
&\geq \sqrt{1+2\alpha\gamma(T)+\alpha^2|x'(Tx)|^2} \quad \text{mit } \gamma(T) := \inf\operatorname{Re}V(T) \\
&\geq \sqrt{1+2\alpha\gamma(T)},
\end{aligned}$$

bzw.

$$\|F(\alpha)\| \leq \frac{1}{\sqrt{1+2\alpha\gamma(T)}}.$$

Zusammenfassend gilt also

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\|\mathrm{id}-\alpha T\|-1}{\alpha} &= \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\|F(\alpha)\|-1}{\alpha} \\
&\leq \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\alpha\gamma(T)}}-1\right) \\
&= \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\alpha\gamma(T)}}-1\right) \quad \text{nach l'Hospital} \\
&= -\gamma(T)\lim_{\alpha\to 0^+}\big(1+2\alpha\gamma(T)\big)^{-3/2} \\
&= -\inf\operatorname{Re}V(T) \\
&= \sup\operatorname{Re}V(-T)
\end{aligned}$$

und mit Übergang zum Operator $-T$

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\|\mathrm{id}+\alpha T\|-1}{\alpha} \leq \sup\operatorname{Re}V(T)$$

Andererseits ist für festes $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}
1+\alpha\operatorname{Re}x'(Tx) &= \operatorname{Re}\big(x'(x)+\alpha x'(Tx)\big) \\
&\leq \|\mathrm{id}+\alpha T\|,
\end{aligned}$$

also

$$\operatorname{Re}x'(Tx) \leq \frac{\|\mathrm{id}+\alpha T\|-1}{\alpha}.$$

Mit $\alpha \to 0^+$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 1.2. Die rechte Seite der Gleichung (1.1) wird logarithmische Norm genannt. Sie kann, auch wenn ihr Name es nicht vermuten lässt, negativ sein. Einen Überblick verschafft Söderlind (2006).

Dank Theorem 1.1 können wir den numerischen Radius eines Operators T auch als

$$v(T) = \max_{\omega \in \mathbb{T}} \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|\mathrm{id} + \alpha\omega T\| - 1}{\alpha}, \tag{1.2}$$

schreiben; speziell ist

$$v(T) = v(T'). \tag{1.3}$$

Bollobás zeigt (1970), wie man in wenigen Zeilen aus einer Variante des Satzes von Bishop-Phelps die Inklusion $\overline{V(T')} \subseteq \overline{V(T)}$, wegen $V(T) \subseteq V(T')$ also $\overline{V(T)} = \overline{V(T')}$ und insbesondere auch auf diesem Weg Gleichung (1.3), gewinnen kann.

1.2 Der numerische Index

Nach Konstruktion handelt es sich bei v um eine Halbnorm auf $L(X)$, die $v(\,\cdot\,) \leq \|\cdot\|$ erfüllt. Existiert überdies eine positive Konstante m, so dass auf einem Banachraum X

$$m\|T\| \leq v(T) \quad \text{für alle } T \in L(X) \tag{1.4}$$

gilt, ist mit v sogar eine zur Operatornorm äquivalente Norm gefunden. Die größte Ungleichung (1.4) erfüllende nicht-negative Zahl wird mit dem Zeichen $n(X)$ versehen und numerischer Index genannt. Im nulldimensionalen Fall, den wir im Weiteren stillschweigend ignorieren, setzen wir $n(X) = 1$.

Offenbar gilt stets $n(X) \leq 1$. Nicht-triviale untere Schranken hängen vom zugrunde liegenden Körper ab: Im komplexen Fall ist e^{-1} bestmöglich (Bohnenblust und Karlin, 1955; Glickfeld, 1970), im reellen Fall kann der numerische Index auch Null sein, wie schon eine Drehung im Zweidimensionalen verdeutlicht. Martín und Payá präsentieren (2000) den Fall eines solchen reellen Banachraums X mit $n(X) = 0$, für den der numerische Radius zudem wider Erwarten eine Norm auf $L(X)$ darstellt, die folglich nicht zur Operatornorm äquivalent ist, und bzgl. derer der Raum $L(X)$ nicht vollständig sein kann.

Aus Gleichung (1.3) können wir überdies sofort $n(X) \geq n(X')$ schließen; In Kapitel 2 gehen wir der Frage nach, ob sogar stets $n(X) = n(X')$ gilt.

1.3 Numerischer Index Eins

Von besonderem Interesse sind Banachräume mit numerischem Index Eins, da auf ihnen numerischer Radius und Operatornorm übereinstimmen. Um sie mit Hilfe von Gleichung (1.2) charakterisieren zu können, bedarf es einer weiteren Feststellung.

Lemma 1.3 (Abramovich et al. (1991, Lemma 2.1))**.** *Sei X ein Banachraum. Gilt*

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

für zwei Punkte x, $y \in X$, so gilt auch

$$\|\lambda x + \mu y\| = \lambda\|x\| + \mu\|y\|$$

für alle λ, $\mu > 0$.

Beweis. O. E. ist $\lambda \geq \mu$ und somit

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + \mu y\| &= \|\lambda(x + y) - (\lambda - \mu)y\| \\
&\geq \lambda\|x + y\| - (\lambda - \mu)\|y\| \\
&= \lambda(\|x\| + \|y\|) - (\lambda - \mu)\|y\| \\
&= \lambda\|x\| + \mu\|y\|.
\end{aligned}$$ □

Damit lässt sich numerischer Index Eins auch wie folgt formulieren.

Satz 1.4 (Martín und Oikhberg (2004, Lemma 2.3))**.** *Sei X ein Banachraum. Äquivalent sind:*

(i) $n(X) = 1$,

(ii) $\max_{\omega\in\mathbb{T}}\|\mathrm{id} + \omega T\| = 1 + \|T\|$ *für alle* $T \in L(X)$ *und*

(iii) $\max_{\omega\in\mathbb{T}}\|\mathrm{id} + \omega T\| = 2$ *für alle* $T \in L(X)$ *mit* $\|T\| = 1$.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei $T \in L(X)$ beliebig. Gleichung (1.2) zufolge gilt

$$\max_{\omega\in\mathbb{T}} \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\|\mathrm{id} + \alpha\omega T\| - 1}{\alpha} = \|T\|. \tag{1.5}$$

Die Dreiecksungleichung besagt, dass Normen konvex sind; Limes und Infimum stimmen in Gleichung (1.5) also überein. Folglich gilt

$$\max_{\omega\in\mathbb{T}}\|\mathrm{id} + \omega T\| - 1 \geq \|T\|$$

wie verlangt.
(ii) $\implies$ (iii): Das ist klar.
(iii) $\implies$ (i): Sei $T \in L(X)$ beliebig. O. E. ist $\|T\| > 0$, wir setzen $S \coloneqq T/\|T\|$. Nach Voraussetzung gilt

$$\|\mathrm{id} + \omega S\| = 1 + \|S\|$$

für ein $\omega \in \mathbb{T}$, wegen Lemma 1.3 folgt für beliebiges $\alpha > 0$

$$\|\mathrm{id} + \alpha\omega T\| = \|\mathrm{id} + \|T\|\alpha\omega S\| = 1 + \alpha\|T\|,$$

also

$$v(T) \geq \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\|\mathrm{id} + \alpha\omega T\| - 1}{\alpha} = \|T\|$$

und damit die Behauptung. □

Bemerkung 1.5. Die in Satz 1.4 erwähnte Identität

$$\max_{\omega \in \mathbb{T}} \|\mathrm{id} + \omega T\| = 1 + \|T\|$$

heißt alternative Daugavet-Gleichung. Sie wird von Martín und Oikhberg näher untersucht (2004).

An anderer Stelle soll uns die in Satz 1.4 aufgezeigte Charakterisierung noch sehr nützlich sein, auch sie verlangt jedoch Kenntnis sämtlicher Operatoren auf dem betrachteten Raum. Im Endlichdimensionalen lässt sich numerischer Index Eins auch geometrisch charakterisieren.

Satz 1.6 (McGregor (1971, Theorem 3.1))**.** *Ist X endlichdimensionaler Banachraum, so sind äquivalent:*

(i) $n(X) = 1$ *und*

(ii) *für alle* $x \in \operatorname{ex} B_X$ *und* $x' \in \operatorname{ex} B_{X'}$ *gilt* $|x'(x)| = 1$.

Bemerkung 1.7. Eigenschaft (ii), die wir nach Lima (1978, Theorem 2.2) Extremalpunktdurchschnittseigenschaft (engl. «extreme point intersection property», kurz E.P.I.P) nennen, kann im Unendlichdimensionalen nicht genügen, um numerischen Index Eins zu gewährleisten, da die Einheitskugel eines unendlichdimensionalen Raumes keine Extremalpunkte zu besitzen braucht. Ein Beispiel für einen solchen Banachraum Y mit $\operatorname{ex} B_Y = \emptyset$ und $n(Y) < 1$ wird von Kadets et al. diskutiert (2006, Problem 11). Formulieren wir die E.P.I.P für X' an Stelle von X, erhalten wir eine im Endlichdimensionalen äquivalente Aussage. Sie ist allgemein hinreichend, wie sich mit Gleichung (1.3) und Lemma 2.15 leicht einsehen lässt, nicht aber notwendig (Boyko et al., 2007, Example 3.4(b)).

1.4 Die CL-Eigenschaft

Fullerton untersucht eine Eigenschaft reeller Banachräume, die er bei $C(K)$ mit hausdorffschem Kompaktum K und $L^1(\mu)$ mit endlichem Maß μ, allgemeiner bei sog. C- und L-Räumen nachweist (1961, Theorem 3.2). Er spricht von CL-Räumen.

Definition 1.8. Sei X ein reeller Banachraum. Gilt für beliebige maximale konvexe Teilmengen $F \subseteq S_X$ schon $\operatorname{co}(F \cup -F) = B_X$, so heißt X *CL-Raum.*

Im Komplexen liegt es nahe, $\operatorname{co}(F \cup -F)$ durch $\operatorname{co}(\mathbb{T}F)$, also die absolutkonvexe Hülle von F zu ersetzen und *mutatis mutandis* auch von komplexen CL-Räumen zu sprechen. Der Effekt indes ist nicht der gewünschte, wie von Martín und Payá gezeigt wird (2004, Proposition 1): Zwar haben komplexe $C(K)$-Räume die CL-Eigenschaft, die Räume $L^1[0,1]$ und ℓ^1 über $\mathbb{C}$ jedoch haben sie, im Gegensatz zum reellen Fall[1], nicht. Eine passende Abschwächung, mit der bereits Lindenstrauss hantiert (1964, Theorem 4.8(b)), ohne ihr einen Namen zu geben, führt Lima (1978) als CL-Nähe (engl. «almost CL») ein.

[1] Um einzusehen, dass ℓ^1 über $\mathbb{R}$ ein CL-Raum ist, genügt es, einen zu ℓ^1 isometrisch isomorphen Raum $L^1(\mu)$ mit endlichem Maß μ zu betrachten.

Definition 1.9. Sei X ein Banachraum. Gilt für beliebige maximale konvexe Teilmengen $F \subseteq S_X$ schon $\overline{\mathrm{co}}(\mathbb{T}F) = B_X$, so heißt X *CL-nah* (engl. «almost CL»).

Dass darunter auch die komplexen Räume ℓ_1 und $L^1[0,1]$ fallen, wird ebenfalls von Martín und Payá gezeigt (2004, Proposition 1).

Die CL-Eigenschaft steht offenbar im Widerspruch zur strikten Konvexität: In strikt konvexen Räumen sind konvexe Teilmengen der Einheitssphäre stets einpunktig. Ein zumindest zweidimensionaler Banachraum kann also höchstens eine der beiden Eigenschaften haben.

1.5 Üppigkeit

Indem wir die Einheitskugel eines Banachraumes X mit einer Hyperebene schneiden, erhalten wir eine Scheibe. Wir setzen dazu für ein Funktional $x' \in S_{X'}$ und $\alpha > 0$

$$S(B_X, x', \alpha) \coloneqq \{x \in B_X \colon \operatorname{Re} x'(x) > 1 - \alpha\}.$$

Die absolutkonvexe Hülle eines solchen Gebildes besteht im reellen Fall aus der Scheibe $S(B_X, x', \alpha)$ selbst, der gegenüberliegenden Scheibe $-S(B_X, x', \alpha)$ und einem Verbindungsstück. Abbildung 1.1 veranschaulicht dies im euklidischen Raum — das Verbindungsstück ist hier zylindrisch und in der Abbildung gestrichelt. Die Gestalt der absolut-

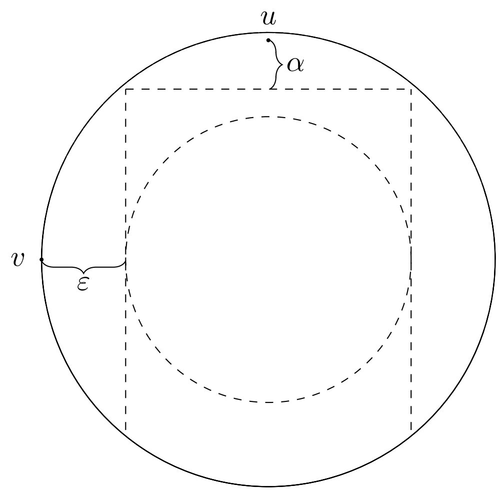

Abbildung 1.1: Die absolutkonvexe Hülle einer Scheibe im euklidischen Raum

konvexen Hülle $\mathrm{co}(\mathbb{T}\, S(B_X, x', \alpha))$ lässt sich auch für kleinere Scheibendicken α erahnen: Je flacher eine Scheibe wird, desto schmaler wird sie auch und mit ihr der Zylinder. Wie schmal der Zylinder wird, hängt dabei nicht vom gewählten Funktional ab. Das ist nicht in allen Banachräumen so.

In CL-nahen Räumen lassen sich für beliebige Scheibendicke Funktionale finden, bzgl. derer eine Scheibe mit entsprechender Dicke in einem noch zu präzisierenden Sinne groß ist — ein Umstand, dem wir einen Namen geben.

Definition 1.10. Ein Banachraum X heißt *üppig* (engl. «lush»), falls für alle Punkte u, $v \in S_X$ und $\varepsilon > 0$ ein Funktional $x' \in S_{X'}$ existiert, das

$$u \in S(B_X, x', \varepsilon) \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}(v, \operatorname{co}(\mathbb{T}\, S(B_X, x', \varepsilon))) < \varepsilon$$

erfüllt.

Satz 1.11. *Ist X ein CL-naher Raum, so ist X üppig.*

Beweis. Seien u, $v \in S_X$ beliebig. Indem wir alle u enthaltenden konvexen Teilmengen von S_X nach Inklusion ordnen, erhalten wir mit dem Zornschen Lemma eine maximale konvexe Teilmenge $F \subseteq S_X$, für die nach Voraussetzung $\overline{\operatorname{co}}(\mathbb{T}F) = B_X$, also $\operatorname{dist}(v, \operatorname{co}(\mathbb{T}F)) = 0$ gilt. Finden wir nun ein Funktional x', so dass sich F als

$$\tilde{F} \coloneqq \{y \in S_X \colon x'(y) = 1\}$$

schreiben lässt, ist die Üppigkeit von X evident. Dazu trennen wir F und $\operatorname{int} B_X$ mit einem $x' \in S_{X'}$, das

$$\operatorname{Re} x'(x) < \operatorname{Re} x'(y) \qquad \text{für alle } y \in F,\ x \in \operatorname{int} B_X$$

und folglich

$$1 = \sup_{x \in \operatorname{int} B_X} \operatorname{Re} x'(x) \leq \operatorname{Re} x'(y) \leq 1 \qquad \text{für alle } y \in F$$

erfüllt. Haben wir also ein solches x' mit zugehörigem $\tilde{F}$ gefunden, gilt $F \subseteq \tilde{F}$, weshalb aus der Konvexität von $\tilde{F}$ und der Maximalität von F schon $F = \tilde{F}$ folgt. □

Bemerkung 1.12. Die Funktionale x' im Beweis von Satz 1.11 sind extremal in $B_{X'}$. Um das einzusehen, setzen wir

$$E \coloneqq \left\{y' \in S_{X'} \colon y'|_F = 1\right\}$$

mit wie dort gewähltem F und x'. Nun ist E eine trivialerweise schwach*-abgeschlossene und dem Satz von Alaoglu zufolge schwach*-kompakte Seite von $B_{X'}$. Nach dem Satz von Krein-Milman existiert damit ein

$$y' \in \operatorname{ex} E \subseteq \operatorname{ex} B_{X'}.$$

Wegen $\overline{\operatorname{co}}(\mathbb{T}F) = B_X$ stimmen die beiden Funktionale x' und y' des Weiteren auf ganz B_X überein, sind also identisch.

Der Üppigkeitsbegriff spielt in den folgenden Kapiteln eine tragende Rolle. Ein Grund dafür ist, dass diese geometrische Eigenschaft genügt, um numerischen Index Eins zu gewährleisten.

Theorem 1.13 (Boyko et al. (2007, Proposition 2.2))**.** *Sei X üppig. Dann hat X numerischen Index Eins.*

Beweis. Sei $T \in L(X)$ mit $\|T\| = 1$ beliebig. Nach Satz 1.4 brauchen wir nur

$$\max_{\omega\in\mathbb{T}} \|\mathrm{id} + \omega T\| = 2$$

zu zeigen. Sei dazu $1/2 > \varepsilon > 0$. Wir wählen $u_0 \in S_X$, so dass $\|Tu_0\| > 1 - \varepsilon$ und setzen

$$v_0 = \frac{Tu_0}{\|Tu_0\|}.$$

Nach Voraussetzung existieren ein Funktional $x' \in S_{X'}$ mit $v_0 \in S(B_X, x', \varepsilon)$, Skalare $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{k=1}^n |\theta_k| \leq 1$ und passende Punkte $x_1, \dots, x_n \in S(B_X, x', \varepsilon)$, so dass $\|y - u_0\| < \varepsilon$ mit $y = \sum_{k=1}^n \theta_k x_k$. Damit ist

$$|x'(Ty)| = \left| x'(v_0) - x'\left(T\left(\frac{u_0}{\|Tu_0\|} - y\right)\right)\right| \geq 1 - \varepsilon - \left\| \frac{u_0}{\|Tu_0\|} - y \right\|$$

und wegen

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u_0}{\|Tu_0\|} - y \right\| &= \left\| \frac{u_0 - \|Tu_0\| y}{\|Tu_0\|} \right\| \\ &\leq 2\|u_0 - \|Tu_0\| y\| \\ &\leq 2\big(\|u_0 - y\| + (1 - \|Tu_0\|)\|y\|\big) \\ &\leq 2(\varepsilon + \varepsilon\|y\|) \\ &\leq 4\varepsilon \end{aligned}$$

insgesamt $|x'(Ty)| \geq 1 - 5\varepsilon$. Weil $x'(Ty)$ sich auch durch $\sum_{k=1}^n \theta_k x'(Tx_k)$ und somit als Absolutkonvexkombination der $x'(Tx_k)$ darstellen lässt, muss also $|x'(Tx_j)| \geq 1 - 5\varepsilon$ für zumindest einen Index j gelten. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \max_{\omega\in\mathbb{T}} \|\mathrm{id} + \omega T\| &\geq \max_{\omega\in\mathbb{T}} |x'((\mathrm{id} + \omega T)x_j)| \\ &= \max_{\omega\in\mathbb{T}} |x'(x_j) + \omega x'(Tx_j)| \\ &= |x'(x_j)| + |x'(Tx_j)| \\ &> 1 - \varepsilon + 1 - 5\varepsilon \\ &= 2 - 6\varepsilon \end{aligned}$$

und weil ε beliebig war, die Behauptung. □

Korollar 1.14. *CL-nahe Räume haben numerischen Index Eins.*

2 Der numerische Index des Dualraumes

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob für einen Banachraum X je $n(X) > n(X')$ gelten kann. Dafür untersuchen wir zunächst die Üppigkeit weiter, mit deren Hilfe sich eine neue Klasse von Räumen mit numerischem Index Eins erschließt.

2.1 C-Reichhaltigkeit

Definition 2.1. Sei K ein kompakter Hausdorffraum. Ein abgeschlossener Unterraum $X \subseteq C(K)$ heißt *C-reichhaltig* (engl. «C-rich»), falls für alle nicht-leeren offenen Teilmengen $U \subseteq K$ und $\varepsilon > 0$ eine positive Funktion $h \in C(K)$ mit $\operatorname{supp} h \subseteq U$, $\|h\| = 1$ und $\operatorname{dist}(h, X) < \varepsilon$ existiert.

Bemerkung 2.2. In der Definition C-reichhaltiger Unterräume lässt sich $\operatorname{dist}(h, X) < \varepsilon$ sogar durch normierte Funktionen in X realisieren. Gilt nämlich $\operatorname{dist}(h, X) < \varepsilon/2$ für ein $\varepsilon \in (0, 2)$, existiert also eine $g \in X$ mit $\|g - h\| < \varepsilon/2$, so ist

$$||g\| - 1| = |\|g\| - \|h\|| \leq \|g - h\| < \varepsilon/2$$

und folglich mit $\hat{g} := g/\|g\|$

$$\|\hat{g} - h\| \leq \|\hat{g} - g\| + \|g - h\| < |\|g\| - 1| + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Wie bereits bemerkt, ist $C(K)$ mit hausdorffschem Kompaktum K ein CL-Raum. Dank der C-Reichhaltigkeit finden wir nun Unterräume, die zumindest üppig sind, und damit ebenfalls numerischen Index Eins haben.

Theorem 2.3 (Boyko et al. (2007, Theorem 2.4))**.** *Sei K ein kompakter Hausdorffraum und X ein C-reichhaltiger Unterraum von $C(K)$. Dann ist X üppig.*

Beweis. Seien $u, v \in S_X$ und $\varepsilon \in (0, 1)$ beliebig. Wir wählen $t_0 \in K$, so dass $|u(t_0)| = 1$ und setzen $a := u(t_0)$, $b := v(t_0)$. Weil u und v stetig sind, finden wir zu t_0 eine Umgebung U mit

$$|u(t) - a| < \varepsilon/3 \quad \text{und} \quad |v(t) - b| < \varepsilon/3 \quad \text{für alle } t \in U.$$

Nach Voraussetzung gibt es nun eine stetige Funktion $h\colon K \to [0, 1]$ mit $\operatorname{supp} h \subseteq U$, $\|h\| = 1$ und $\operatorname{dist}(h, X) < \varepsilon/3$. Entsprechend gibt es eine Stelle $t_1 \in U$ mit $h(t_1) = 1$

und eine Funktion $\tilde{h} \in X$ mit $\|h - \tilde{h}\| < \varepsilon/3$, die wir wegen Bemerkung 2.2 als normiert voraussetzen können. Setzen wir

$$x' := \bar{a}\frac{\delta_{t_1}|_X}{\|\delta_{t_1}|_X\|},$$

so ist $x' \in S_{X'}$ wegen

$$\begin{aligned}
\|\delta_{t_1}|_X\| &\geq |\tilde{h}(t_1)| \\
&\geq |h(t_1)| - |h(t_1) - \tilde{h}(t_1)| \\
&\geq 1 - \|h - \tilde{h}\| \\
&\geq 1 - \varepsilon/3
\end{aligned}$$

wohldefiniert und es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} x'(u) &\geq \operatorname{Re} \bar{a}\delta_{t_1}(u) \\
&= \operatorname{Re} \bar{a}u(t_1) \\
&= \bar{a}a - \operatorname{Re}\big(\bar{a}(a - u(t_1))\big) \\
&\geq 1 - |a - u(t_1)| \\
&> 1 - \varepsilon/3,
\end{aligned}$$

insbesondere also $u \in S(B_X, x', 2\varepsilon)$. Wegen $|b| \leq |a|$ liegt die Null überdies in $\operatorname{co}(\mathbb{T} - b/a)$, etwa $0 = \lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2$ für ein $\lambda \in [0,1]$ und γ_1, $\gamma_2 \in \mathbb{T} - b/a$. Sei nun

$$v_k := \frac{v + \gamma_k a\tilde{h}}{1 + \varepsilon}$$

für $k \in \{1, 2\}$; wir zeigen

$$|v(t) + \gamma a h(t)| \leq 1 + \varepsilon/3$$

für alle $t \in K$ und $\gamma \in \mathbb{T} - b/a$, also $|b + \gamma a| = 1$: Für $t \notin U \supseteq \operatorname{supp} h$ ist die Behauptung offensichtlich erfüllt. Im Fall $t \in U$ folgt sie aus

$$\begin{aligned}
|v(t) + \gamma a h(t)| &\leq |v(t) - b| + |b + \gamma a h(t)| \\
&< \varepsilon/3 + |b + \gamma a h(t)|
\end{aligned}$$

und der Beobachtung, dass $b + \gamma a h(t)$ wegen $h(t) \in [0,1]$ Konvexkombination von $b + \gamma a$ und b ist. Für $k \in \{1, 2\}$ wissen wir damit

$$\begin{aligned}
(1 + \varepsilon)\|v_k\| &= \|v + \gamma_k a\tilde{h}\| \\
&\leq \|v + \gamma_k a h\| + \|\gamma_k a h - \gamma_k a\tilde{h}\| \\
&\leq 1 + \varepsilon/3 + |\gamma_k|\|h - \tilde{h}\| \\
&\leq 1 + \varepsilon/3 + 2\varepsilon/3 \\
&= 1 + \varepsilon
\end{aligned}$$

und folglich $v_k \in B_X$; andererseits können wir

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)|x'(v_k)| &\geq |v(t_1) + \gamma_k a\tilde{h}(t_1)| \\ &\geq |v(t_1) + \gamma_k a| - |\gamma_k| \|h - \tilde{h}\| \\ &\geq |b + \gamma_k a| - |v(t_1) - b| - 2\varepsilon/3 \\ &\geq 1 - \varepsilon/3 - 2\varepsilon/3 \\ &= 1 - \varepsilon,\end{aligned}$$

also $\theta_k v_k \in S(B_X, x', 2\varepsilon)$ für ein passendes $\theta_k \in \mathbb{T}$ schließen. Wegen

$$(1+\varepsilon)\|v - (\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2)\| = \varepsilon$$

ist damit $\operatorname{dist}(v, \operatorname{co}(\mathbb{T}\, S(B_X, x', 2\varepsilon))) < 2\varepsilon$; es folgt die Behauptung. □

Wir wollen den Begriff der C-Reichhaltigkeit nun etwas greifbarer machen. In Vorbereitung darauf halten wir ein paar Lemmata fest.

Lemma 2.4. *Sei X ein Banachraum. Dann gilt für $x' \in S_{X'}$ und $x \in X$*

$$\operatorname{dist}(x, \ker x') = |x'(x)|.$$

Beweis. Für $y \in \ker x'$ ist

$$\begin{aligned}\|x - y\| &\geq |x'(x - y)| \\ &= |x'(x)|,\end{aligned}$$

also

$$\operatorname{dist}(x, \ker x') \geq |x'(x)|.$$

Sei umgekehrt $\varepsilon > 0$. Wir wählen ein $y \in (1+\varepsilon)B_X$ mit $x'(y) = 1$ und setzen $z := x'(x)y$. Nun ist

$$x'(x - z) = x'(x) - x'(x)x'(y) = 0,$$

also $x - z \in \ker x'$; wegen

$$\|x - (x - z)\| = |x'(x)|\|y\| \leq (1+\varepsilon)|x'(x)|$$

folgt so

$$\operatorname{dist}(x, \ker x') \leq (1+\varepsilon)|x'(x)|$$

und mit Übergang $\varepsilon \to 0$ die Behauptung. □

Lemma 2.5. *Ist T ein normaler Hausdorffraum und U eine Teilmenge, die keine isolierten Punkte enthält, so existiert eine disjunkte Familie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener nicht-leerer Mengen $U_n \subseteq U$ und eine Folge stetiger Funktionen $h_n \colon T \to [0,1]$ mit $\operatorname{supp} h_n \subseteq U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wäre die Menge U endlich, so enthielte sie im Widerspruch zur Voraussetzung einen isolierten Punkt. Wir wählen zwei Punkte t_0 und s_0 in U und trennen sie durch in U gelegene offene Umgebungen U_0 und V_0. Beide Umgebungen sind unendlich, da auch sie keine isolierten Punkte enthalten, und trivialerweise hausdorffsch; wir finden also Punkte t_1 und s_1 in V_0, die wir durch ganz in V_0 gelegene offene Umgebungen U_1 und V_1 trennen können. Auf diese Weise erhalten wir eine Familie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-leerer offener disjunkter Mengen $U_n \subseteq U$ und Punkte $t_n \in U_n$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Weil T normal ist, existiert eine offene Menge O_n mit $t_n \in O_n \subseteq \overline{O_n} \subseteq U_n$. Nach dem Lemma von Urysohn können wir $\{t_n\}$ und $T \setminus O_n$ durch eine stetige Funktion $h_n \colon T \to [0,1]$ mit $h_n(t_n) = 1$ und $h_n(T \setminus O_n) = \{0\}$ trennen. □

Identifizieren wir wie üblich Elemente $f \in C(K)'$ mit regulären Borelmaßen μ_f und setzen wir

$$\operatorname{supp}(f) = \bigcap \{C \subseteq K \colon C \text{ ist abgeschlossen}, |\mu_f|(K \setminus C) = 0 \},$$

lässt sich C-Reichhaltigkeit von Unterräumen endlicher Kodimension jetzt wie folgt charakterisieren.

Satz 2.6 (Boyko et al. (2007, Proposition 2.5))**.** *Sei K kompakter Hausdorffraum und $f_1, \ldots, f_n \in C(K)'$. Äquivalent sind:*

(i) $\bigcap_{k=1}^n \ker f_k =: Y$ *ist C-reichhaltig und*

(ii) $\bigcup_{k=1}^n \operatorname{supp}(f_k)$ *enthält keine isolierten Punkte.*

Beweis. (ii) $\implies$ (i): Sei $U \subseteq K$ offen und nicht-leer, $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Die Menge U enthält einen isolierten Punkt t_0. Wir setzen $h = \chi_{\{t_0\}}$, sodass h offenbar positiv, stetig und normiert ist und $\operatorname{supp} h \subseteq U$ erfüllt. Wir zeigen noch $h \in Y$ und nehmen dazu das Gegenteil an. Sei also $f_m(h) \neq 0$ für ein $m \leq n$. Dann gilt auch $\mu_{f_m}(\{t_0\}) = f_m(h) \neq 0$. Im Widerspruch zur Voraussetzung enthält $\operatorname{supp}(f_m)$ damit den isolierten Punkt t_0.
2. Die Menge U enthält keinen isolierten Punkt. Nach Lemma 2.5 erhalten wir eine Familie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener disjunkter nicht-leerer Teilmengen von K und eine beschränkte Folge positiver stetiger Funktionen $h_n \in C(K)$ mit $\operatorname{supp} h_n \subseteq U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   Borelmaße sind lokal-endlich, auf dem Kompaktum K also endlich; aus der σ-Additivität folgt $\mu(U_n) \to 0$ für alle $\mu \in C(K)'$, insbesondere konvergiert $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen Null. Folglich ist auch $([h_n])_{n\in\mathbb{N}}$ schwache Nullfolge in X/Y. Weil X/Y endlichdimensional ist, gilt sogar
   $$\operatorname{dist}(h_n, Y) = \|[h_n]\| \to 0,$$
   wir finden also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{dist}(h_n, Y) < \varepsilon$. Nach Konstruktion gilt $\operatorname{supp}(h_n) \subseteq U_n \subseteq U$.

(i) $\implies$ (ii): O. E. ist $\|f_1\| = 1$ und enthält $\operatorname{supp}(f_1)$ einen isolierten Punkt t_0. Wir überlegen uns zunächst

$$\mu_{f_1}(\{t_0\}) \neq 0$$

und nehmen dazu das Gegenteil an. Setzen wir

$$\mathcal{C} = \{C \subseteq K : C \text{ ist abgeschlossen, } |\mu_f|(K \setminus C) = 0\ \},$$

so gilt $\operatorname{supp}(f_1) = \bigcap \mathcal{C}$. Weil t_0 isoliert ist, ist mit jedem $C \in \mathcal{C}$ auch $C \setminus \{t_0\}$ abgeschlossen und es gilt $|\mu_{f_1}|(K \setminus (C \setminus \{t_0\})) = 0$. Folglich ist $t_0 \notin \operatorname{supp}(f_1)$; ein Widerspruch. Setzen wir nun $U = \{t_0\}$, so ist $U \subseteq K$ offen und für beliebige positive Funktionen $h \in C(K)$ mit $\|h\| = 1$ und $\operatorname{supp} h \subseteq U$, also $h = \chi_{\{t_0\}}$, gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(h, Y) &\geq \operatorname{dist}(h, \ker f_1) \\ &= |f_1(h)| && \text{(nach Lemma 2.4)} \\ &= |\mu_{f_1}(\{t_0\})| > 0. \end{aligned}$$

Damit kann Y nicht C-reichhaltig sein. □

Korollar 2.7. *Ist K ein kompakter Hausdorffraum ohne isolierte Punkte und $X \subseteq C(K)$ endlich-kodimensional, so ist X C-reichhaltig.*

2.2 Beispiele

In diesem Kapitel wollen wir einen Banachraum X mit $n(X) = 1$ und $n(X') < 1$ konstruieren. Dafür müssen wir noch einige Vorarbeit leisten.

Lemma 2.8 (Martín und Payá (2000, Proposition 1))**.** *Sind X und Y Banachräume, so gilt $n(X \oplus_1 Y) \leq \min\{n(X), n(Y)\}$.*

Beweis. Wir setzen $Z := X \oplus_1 Y$ und zeigen $n(Z) \leq v(S)$ für alle $S \in S_{L(X)}$. Aus Symmetriegründen folgt dann die Behauptung. Sei also $S \in S_{L(X)}$ beliebig. Durch

$$T(x + y) := Sx \quad \text{für } x \in X \text{ und } y \in Y$$

wird offenbar ein Operator $T \in S_{L(Z)}$ definiert. Somit gilt $v(T) \geq n(Z)$. Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig, existieren ein $x + y = z \in S_Z$ mit $x \in X$, $y \in Y$ und ein $x' + y' = z' \in S_{Z'}$ mit $x' \in Y^\perp$, $y' \in X^\perp$ und $z'(z) = 1$, die

$$n(Z) - \varepsilon \leq |z'(Tz)|.$$

erfüllen. Setzen wir $\tilde{x}' := x'/\|x'\|$ und $\tilde{x} := x/\|x\|$, ist des Weiteren

$$|z'(Tz)| = |z'(Sx)| = |x'(Sx)| \leq |\tilde{x}'(S\tilde{x})|.$$

Können wir noch $\tilde{x}'(\tilde{x}) = 1$ zeigen, gilt also $n(Z) - \varepsilon \leq v(S)$ für beliebiges $\varepsilon > 0$ und es folgt die Behauptung. Zunächst bemerken wir dazu

$$1 = z'(z) = x'(x) + y'(y) \leq \|x'\|\|x\| + \|y'\|\|y\|.$$

Dann unterscheiden wir zwei Fälle. Gilt $\|x'\| \geq \|y'\|$, so auch

$$\begin{aligned} \|x'\|\|x\| + \|y'\|\|y\| &= \|x'\|\|x\| + \|y'\|(1 - \|x\|) \\ &= \|y'\| + (\|x'\| - \|y'\|)\|x\| \\ &\leq \|y'\| + \|x'\| - \|y'\| \\ &= \|x'\| \\ &\leq 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Gilt $\|x'\| < \|y'\|$, folgt analog wieder

$$\|x'\|\|x\| + \|y'\|\|y\| \leq 1.$$

Damit ist

$$x'(x) = \|x'\|\|x\| + \|y'\|\|y\| - y'(y) \geq \|x'\|\|x\|$$

und folglich die Behauptung gezeigt. □

Bemerkung 2.9. Es ist klar, dass sich Gleichung (2.1) so modifizieren lässt, dass auch $n(X \oplus_\infty Y) \leq \min\{n(X), n(Y)\}$ gewonnen werden kann, da aus $Z = X \oplus_\infty Y$ stets $Z' = Y^\perp \oplus_1 X^\perp$ folgt.

Die Konstruktion, auf die wir in diesem Kapitel hinarbeiten, wollen wir auf einen Quotienten zurückführen, dessen numerischer Index nicht Eins ist. Dass dem so ist, überlegen wir uns jetzt.

Beispiel 2.10. Sei

$$X = \{(a, b, c) \in \ell^\infty(3) \colon a + b + c = 0\}.$$

Dann gilt $n(X) < 1$.

Beweis. Es lässt sich leicht einsehen, dass

$$\operatorname{ex} B_X = \{\pm(1, -1, 0), \pm(1, 0, -1), \pm(0, 1, -1)\}$$

gilt (womit es sich bei der Einheitskugel um ein regelmäßiges Sechseck handelt). Wir betrachten nun das Funktional $x' \in X'$, das durch $x' \colon (a, b, c) \mapsto a$ gegeben ist. Können wir $x' \in \operatorname{ex} B_{X'}$ zeigen, so folgt $n(X) < 1$, da X wegen $x'(0, 1, -1) = 0$ nicht die E.P.I.P erfüllt. Aus der Beobachtung

$$X = \{(a, b, -a - b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$$

folgt sofort, dass sich jedes Funktional $y' \in B_{X'}$ als

$$(a, b, -a - b) \mapsto \lambda a + \mu b$$

mit $|\lambda|, |\mu|, |\lambda - \mu| \leq 1$ schreiben lässt. Insbesondere gilt also x' in $S_{X'}$. Gilt nun

$$x' \pm y' \in B_{X'}$$

für ein $y' \in X'$ mit der Darstellung $y'(a, b, -a-b) = \lambda a + \mu b$, so müssen insbesondere $|1 \pm \lambda| \leq 1$ und $|1 \pm (\lambda - \mu)| \leq 1$ gelten. Aus der ersten Bedingung folgt unmittelbar $\lambda = 0$ und aus der zweiten damit $\mu = 0$. Somit gilt $y' = 0$ und weil y' beliebig war, dass x' in $B_{X'}$ extremal ist. □

Damit können wir uns dem zentralen Beispiel zuwenden.

Beispiel 2.11 (Boyko et al. (2007, Example 3.1))**.** Setzen wir

- $Z \coloneqq c \oplus_\infty c \oplus_\infty c$,
- $X \coloneqq \{(x, y, z) \in Z \colon \lim x + \lim y + \lim z = 0\}$ und
- $J \coloneqq \{(x, y, z) \in X \colon \lim x = \lim y = \lim z = 0\}$,

so ist X üppig und es gilt $n(X') < n(X) = 1$.

Beweis. Wir schreiben $\alpha\mathbb{N}$ für die Alexandroff-Kompaktifizierung der natürlichen Zahlen. Bekanntlich kann c als $C(\alpha\mathbb{N})$ aufgefasst werden, Satz 2.6 garantiert also, weil $\alpha\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ keinen in $\alpha\mathbb{N}$ isolierten Punkt enthält, die C-Reichhaltigkeit von X und speziell $n(X) = 1$.

Aus der Abgeschlossenheit von $\alpha\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ in $\alpha\mathbb{N}$ folgt überdies, dass c_0 ein sog. M-Ideal[1] in c ist (Harmand et al., 1993, Example I.1.4(a)), dass also

$$c' = (c_0)^\perp \oplus_1 (c_0)'$$

gilt. Nach Umsortieren kommen wir zu der Zerlegung $Z' = J^\perp \oplus_1 J'$; da X ein Unterraum von Z ist, gilt damit ebenfalls $X' = J^\perp \oplus_1 J'$, wobei der Annihilator $J^\perp$ diesmal in X' gebildet wird (Harmand et al., 1993, Proposition I.1.17(b)). Mittels Lemma 2.8 und weil sich X/J auf naheliegende Weise mit dem in Beispiel 2.10 betrachteten Raum identifizieren lässt, schließen wir

$$n(X') = n(J^\perp \oplus_1 J') \leq n(J^\perp) = n((X/J)') \leq n(X/J) < 1 = n(X).$$ □

Im reellen Fall lässt sich diese Konstruktion geometrisch motivieren.

Bemerkung 2.12. Betrachten wir noch einmal den Raum

$$X = \{(a, b, c) \in \ell^\infty(3) \colon a + b + c = 0\}$$

aus Beispiel 2.10. Wir haben bereits gesehen, dass es sich bei seiner Einheitskugel um ein regelmäßiges Sechseck handelt.

Diese Idee wollen wir nun weiter verfolgen.

[1] M-Ideale werden ausführlicher in Kapitel 3 diskutiert.

Beispiel 2.13. Es gibt einen reellen Banachraum X mit $n(X) = 1$ und $n(X') = 0$.

Beweis. Versehen wir für $n \geq 2$ den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit einer Norm, bzgl. derer die Einheitskugel ein reguläres $2n$-Eck ist, das den Punkt $(1, 0)$ enthält, und nennen wir den daraus resultierenden Banachraum Y_n, so gilt $n(Y_n) \to 0$ (Martín und Merí, 2007, Theorem 5). Dass es solche Normen gibt, ist ohne Weiteres nicht klar; für ein beliebiges $2n$-Eck leistet das zugehörige Minkowskifunktional jedoch das Gewünschte.

Können wir zeigen, dass sich Y_n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ isometrisch in den jeweiligen Raum $\ell^\infty(n)$ einbetten lässt, es also Räume $\tilde{Y}_n$ mit

$$Y_n \cong \tilde{Y}_n \subseteq \ell^\infty(n)$$

gibt, erlaubt uns das analog zu Beispiel 2.11 eine Konstruktion von Räumen

- $Z_n := \overbrace{c \oplus_\infty \cdots \oplus_\infty c}^{n\text{-mal}}$,
- $X_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in Z_n \colon (\lim x_1, \ldots, \lim x_n) \in \tilde{Y}_n\}$ und
- $J_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in X_n \colon (\lim x_1, \ldots, \lim x_n) = 0\}$,

sodass die Quotienten X_n/J_n isometrisch isomorph zu Y_n sind. Entsprechend gilt dann

$$n((X_n)') = n((J_n)^\perp \oplus_1 (J_n)') \leq n((J_n)^\perp) = n((X_n/J_n)') \leq n(X_n/J_n) = n(Y_n) \to 0,$$

aber $n(X_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Ist Y_n wie oben gewählt, handelt es sich auch bei der Einheitskugel $B_{(Y_n)'}$ des Dualraums um ein regelmäßiges $2n$-Eck. Schreiben wir $\operatorname{ex} B_{(Y_n)'}$ als $\{\pm x_1, \ldots, \pm x_n\}$, so können wir durch

$$T_n e_k := x_k \quad \text{für alle } k \leq n$$

einen Operator $T_n \colon \ell^1(n) \to (Y_n)'$ definieren, bei dem es sich offenbar um eine Quotientenabbildung handelt. Folglich gilt

$$(Y_n)' = \ell^1(n)/(\ker T_n)$$

und auch für die Dualräume wie gewünscht

$$Y_n = (Y_n)'' = (\ell^1(n)/(\ker T_n))' = (\ker T_n)^\perp \subseteq \ell^\infty(n).$$

Betrachten wir jetzt den reellen Banachraum X mit

$$X := c_0\big((X_n)_{n\geq 2}\big) \quad \text{und} \quad X' = \ell^1\big(((X_n)')_{n\geq 2}\big),$$

so ist

$$n(X) = \inf_{n\geq 2} n(X_n) = 1 \quad \text{und} \quad n(X') = \inf_{n\geq 2} n((X_n)') = 0.$$

Dass $n(X)$ und $n(X')$ keinen der numerischen Indices $n(X_n)$ bzw. $n((X_n)')$ übertreffen können, folgt dabei direkt aus Lemma 2.8 und Bemerkung 2.9. Die umgekehrte Abschätzung zeigen Martín und Payá (2000, Proposition 1). $\square$

2.3 Berandungen

Bekanntlich gelten in einem Banachraum X für Punkte $x \in X$ und Funktionale $x' \in X'$

$$\|x'\| = \sup\{|x'(y)| \colon y \in S_X\} \quad \text{und} \quad \|x\| = \sup\{|y'(x)| \colon y' \in S_{X'}\}.$$

Die Symmetrie täuscht jedoch: Das Supremum in der rechten Gleichung wird als Konsequenz des Satzes von Hahn-Banach stets angenommen, auf der linken Seite ist das bekanntlich nicht der Fall (James, 1963/1964, Theorem 5). Dieser Eigenschaft der dualen Sphäre geben wir einen Namen.

Definition 2.14. Sei $B \subseteq B_{X'}$ eine nicht-leere Teilmenge. Existiert zu jedem $x \in X$ ein $x' \in B$ mit $|x'(x)| = \|x\|$, so heißt B *Berandung* (engl. «boundary») von $B_{X'}$.

Eine klassische Berandung der dualen Kugel sind ihre Extremalpunkte.

Lemma 2.15. *Sei X ein Banachraum und $x \in S_X$ beliebiger Punkt. Dann existiert ein Funktional $x' \in \operatorname{ex} B_{X'}$ mit $x'(x) = 1$.*

Beweis. Wir setzen

$$F \coloneqq \{x' \in B_{X'} \colon x'(x) = 1\}.$$

Dann ist F nach dem Satz von Hahn-Banach nicht-leer, des Weiteren offensichtlich konvex und schwach*-abgeschlossen. Nach dem Satz von Alaoglu ist F damit schwach*-kompakt, so dass der Satz von Krein-Milman $\operatorname{ex} F \neq \emptyset$ garantiert. Weil F trivialerweise eine Seite von $B_{X'}$ ist, sind Extremalpunkte von F auch extremal in $B_{X'}$; damit ist alles gezeigt. □

Aus Bemerkung 1.12 geht zudem hervor, dass in einem CL-nahen Raum bereits jene extremalen Funktionale x' eine Berandung von $B_{X'}$ bilden, für die die jeweiligen Mengen

$$\{x \in S_X \colon x'(x) = 1\}$$

in S_X maximal konvex sind.

Definition 2.16. Sei X ein CL-naher Raum. Wir setzen

$$\operatorname{mex} B_{X'} \coloneqq \{x' \in \operatorname{ex} B_{X'} \colon \{x \in S_X \colon x'(x) = 1\} \text{ ist maximale konvexe Teilmenge}\}.$$

Ist X nun also CL-nah, können wir eine schwache Form der E.P.I.P auf X' nachweisen.

Lemma 2.17 (Martín und Payá (2004, Lemma 3))**.** *Sei X ein CL-naher Raum. Dann gilt*

$$|x''(x')| = 1 \quad \textit{für alle } x'' \in \operatorname{ex} B_{X''} \textit{ und } x' \in \operatorname{mex} B_{X'}.$$

Beweis. Sei $x' \in \operatorname{mex} B_{X'}$ beliebig. Nach Voraussetzung ist

$$B_X = \overline{\operatorname{co}}\{x \in S_X : |x'(x)| = 1\}$$

und dem Satz von Goldstine zufolge

$$B_{X''} = \overline{\operatorname{co}}^{w^*}\{x \in S_X : |x'(x)| = 1\}.$$

Aus Milmans Umkehrung des Satzes von Krein-Milman ergibt sich somit

$$\operatorname{ex} B_{X''} \subseteq \overline{\{x \in S_X : |x'(x)| = 1\}}^{w^*}$$

und wir haben alles gezeigt. □

Nach dem Studium von Beispiel 2.11 drängen sich zwei Fragen auf: (1) Ist mit der Üppigkeit eine geometrische Charakterisierung von numerischem Index Eins gefunden und (2) sind üppige Räume bereits CL-nah? Kadets et al. konstruieren dazu einen Raum (2009, Remark 4.2), der im Gegensatz zu seinem Dualraum nicht üppig ist, weshalb Frage 1 zu verneinen ist. Wären numerischer Index Eins und Üppigkeit nämlich äquivalent, so übertrüge sich die Üppigkeit ebenfalls auf Präduale, da aus $n(X') = 1$ wegen $n(X) \geq n(X')$ stets $n(X) = 1$ folgt.

$$\begin{tikzcd}
 & & X' \text{ üppig} \arrow[r] \arrow[d, bend right, "/" marking] & n(X') = 1 \arrow[d, bend right] \\
X \text{ CL} \arrow[r] & X \text{ CL-nah} \arrow[r, bend right] & X \text{ üppig} \arrow[r] \arrow[u, bend right, "/" marking] \arrow[ur, "/" marking] \arrow[l, bend right, "/" marking] & n(X) = 1 \arrow[u, bend right, "/" marking]
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2.1: Zusammenhang der betrachteten Eigenschaften

Auch Frage 2 kann mit Beispiel 2.11 beantwortet werden, wie in Beispiel 2.18 ausgeführt wird, sodass sich die vorgestellten Eigenschaften eines Banachraumes X offenbar wie in Abbildung 2.1 verhalten.

Beispiel 2.18 (Boyko et al. (2007, Example 3.4(c)))**.** Sei X wie in Beispiel 2.11. Dann ist X zwar üppig, aber nicht CL-nah.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass jede Berandung B ein Funktional $x' \in B$ enthält, das $|x''(x')| < 1$ für ein $x'' \in \operatorname{ex} B_{X''}$ erfüllt. Nehmen wir an, dem wäre nicht so. Da X' separabel ist, X also keine Kopie von ℓ^1 enthält, gilt (Godefroy, 1987, Theorem III.1(2))

$$B_{X'} = \overline{\operatorname{co}}\, B.$$

Sei nun $T \in L(X')$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Offenbar existiert ein $x' \in B$ mit $\|Tx'\| > \|T\| - \varepsilon$, da sonst $\|Ty'\| \leq \|T\| - \varepsilon$ für alle $y' \in B_{X'}$ gälte. Weil $\operatorname{ex} B_{X''}$ nach Lemma 2.15 die biduale Kugel berandet, finden wir ein $x'' \in \operatorname{ex} B_{X''}$, so dass

$$|x''(Tx')| = \|Tx'\| > \|T\| - \varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt $v(T) = \|T\|$, weil T beliebig war also $n(X') = 1$; ein Widerspruch.

Indem wir X als CL-nah und somit $\operatorname{mex} B_{X'}$ als Berandung voraussetzen, erhalten wir damit einen Widerspruch zu Lemma 2.17. $\square$

3 Übertragung von Üppigkeit

3.1 L- und M-Struktur

Wir haben uns in Kapitel 2 bereits mit der Situation $X \oplus_1 Y = Z$ für Banachräume X, Y und Z beschäftigt. Wir wollen sie jetzt näher betrachten und sprechen in diesem Zusammenhang von X und Y als L-Summanden.

Definition 3.1. Ist Z ein Banachraum und $P\colon Z \to Z$ eine lineare Projektion, die $\|z\| = \|Pz\| + \|z - Pz\|$ für alle $z \in Z$ erfüllt, so nennen wir P eine *L-Projektion* und $\operatorname{ran}(P)$ einen *L-Summanden* in Z.

Analoge Bezeichnungen erhält die Situation $Z = X \oplus_\infty Y$.

Definition 3.2. Ist Z ein Banachraum und $P\colon Z \to Z$ eine lineare Projektion, die $\|z\| = \max\{\|Pz\|, \|z - Pz\|\}$ für alle $z \in Z$ erfüllt, so nennen wir P eine *M-Projektion* und $\operatorname{ran}(P)$ einen *M-Summanden* in Z.

Für die grundlegenden Resultate über L- und M-Struktur, die im Folgenden ohne Beweis verwendet werden, sei auf Harmand et al. (1993, Abschnitt I.1) verwiesen.

M-Summanden lassen sich leicht mit Hilfe eines Beispiels motivieren.

Beispiel 3.3. Sei $X = C([0,1] \cup [2,3])$. Dann ist

$$X = \{x \in X : x|_{[0,1]} = 0\} \oplus_\infty \{x \in X : x|_{[2,3]} = 0\}$$

Dass die Zerlegung von $K = [0,1] \cup [2,3]$ in zwei disjunkte Mengen $K_1 = [0,1]$ und $K_2 = [2,3]$ hierbei tatsächlich zu M-Summanden führt, liegt daran, dass K_1 und K_2 sowohl abgeschlossen als auch offen sind. Da M-Summanden in $C(K)$-Räumen stets von der Form $\{x \in C(K) : x|_D = 0\}$ für ein offenes und abgeschlossenes $D \subseteq K$ sind, gibt es z. B. in $C[0,1]$ keine nicht-trivialen M-Summanden, also solche, für die weder ihr direktes Komplement noch sie selbst ganz $C[0,1]$ sind.

Lässt sich Z in zwei M-Summanden X und Y zerlegen, so gilt auch $Z' = Y^\perp \oplus_1 X^\perp$ und Analoges für L-Summanden. Es kann jedoch $Z' = M \oplus_1 N$ für zwei Banachräume M und N gelten, ohne dass beide oder auch nur einer von beiden Annihilator eines Unterraumes von Z, also schwach*-abgeschlossen ist. Damit handelt es sich bei folgender Definition um eine Verallgemeinerung von M-Summanden.

Definition 3.4. Ist Z ein Banachraum und $X \subseteq Z$ ein abgeschlossener Unterraum, so dass $X^\perp$ ein L-Summand in Z' ist, nennen wir X ein *M-Ideal* in Z.

Um M-Ideal in $C(K)$ zu sein, genügt für einen Unterraum X bei der Darstellung

$$X = \{x \in C(K) \colon x|_D = 0\}$$

schon eine abgeschlossene Teilmenge $D \subseteq K$. In $C[0,1]$ gibt es folglich sehr viele nicht-triviale M-Ideale, die sämtlich echt sind, bei denen es sich also nicht um M-Summanden handelt.

3.2 Übertragung auf M-Summanden

Wir haben in Lemma 2.8 gesehen, dass sich numerischer Index Eins auf L-Summanden überträgt und in Bemerkung 2.9 erwähnt, wie selbiges für M-Summanden zu modifizieren ist. Martín und Payá zeigen ein analoges Resultat für die CL-Eigenschaft bzw. CL-Nähe (2004, Proposition 8 & 9). Wir werden uns in diesem Kapitel der Übertragung von Üppigkeit zuwenden. Als Einstieg sollen uns M-Summanden dienen, die sich am leichtesten erschließen, weil sich auf ihnen definierte Funktionale für unsere Zwecke besonders gut projizieren lassen.

Lemma 3.5. *Seien X, Y Banachräume, $z' \in (X \oplus_\infty Y)'$ mit $\|z'\| = 1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Gibt es ein $x \in S_X$ mit $\operatorname{Re} z'(x) > 1 - \varepsilon$, so gilt $\operatorname{Re} z'(y) \le \varepsilon \|y\|$ für alle $y \in Y$.*

Beweis. Für alle $y \in S_Y$ gilt $\|x + y\| = 1$ und damit wie behauptet

$$\operatorname{Re} z'(y) = \operatorname{Re} z'(x+y) - \operatorname{Re} z'(x) < \operatorname{Re} z'(x+y) - 1 + \varepsilon \le \|x+y\| - 1 + \varepsilon = \varepsilon. \quad \square$$

Satz 3.6. *Ist X M-Summand in einem üppigen Raum Z, so ist X üppig.*

Beweis. Seien u, $v \in S_X$ und $\varepsilon \in (0,1)$ beliebig. Nach Voraussetzung gibt es eine M-Projektion $P \colon Z \to Z$ mit $\operatorname{ran}(P) = X$. Weil Z üppig ist, existiert zudem ein Funktional $z' \in S_{Z'}$ mit $u \in S(B_Z, z', \varepsilon/2)$ und

$$\operatorname{dist}(v, \operatorname{co}(\mathbb{T}\, S(B_z, z', \varepsilon/2))) < \varepsilon/2,$$

realisiert z. B. durch Punkte $z_1, \dots, z_n \in S(B_Z, z', \varepsilon/2)$ mit zugehörigen $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{K}$, die $\sum_{k=1}^n |\theta_k| \le 1$ und $\|\sum_{k=1}^n \theta_k z_k - v\| < \varepsilon/2$ erfüllen. Wir zerlegen sie in

$$x_k \coloneqq P z_k \quad \text{und} \quad y_k \coloneqq P x_k - x_k$$

und stellen fest, dass die Approximation des Punktes v im Wesentlichen durch die Anteile x_k stattfindet:

$$\left\| \sum_{k=1}^n \theta_k z_k - v \right\| = \left\| \sum_{k=1}^n \theta_k y_k + \sum_{k=1}^n \theta_k x_k - v \right\| = \max\left\{ \left\| \sum_{k=1}^n \theta_k y_k \right\|, \left\| \sum_{k=1}^n \theta_k x_k - v \right\| \right\}.$$

Wegen $\operatorname{Re} z'(x) > 1 - \varepsilon/2$ und Lemma 3.5 gilt außerdem $\operatorname{Re} z'(y_k) \leq \varepsilon/2$ für alle k, folglich

$$\operatorname{Re} z'(x_k) = \operatorname{Re} z'(z_k) - \operatorname{Re} z'(y_k) > 1 - \varepsilon/2 - \varepsilon/2 = 1 - \varepsilon,$$

also $x_k \in S(B_X, z', \varepsilon)$ und damit

$$\operatorname{dist}(v, \operatorname{co}(\mathbb{T}\, S(B_X, z', \varepsilon))) < \varepsilon.$$

Indem wir an Stelle von z' die Einschränkung auf X betrachten und sie normieren, folgt die Behauptung. □

3.3 Lokale Reflexivität und M-Ideale

Lindenstrauss und Rosenthal zeigen (1969), dass sich für einen Banachraum X endlichdimensionale Unterräume des Bidualraums beliebig gut in X einbetten lassen — man spricht vom Prinzip der lokalen Reflexivität.

Theorem 3.7 (Lindenstrauss und Rosenthal (1969, Theorem 3.1))**.** *Sei X ein Banachraum, $E \subseteq X''$ endlichdimensionaler Unterraum und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein Operator $T\colon E \to X$ mit $\|T\|\|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$, der $(T \circ i_X)(x) = x$ für alle $x \in X$ mit $i_X(x) \in E$ erfüllt.*

Tatsächlich lässt sich dieses Resultat noch wesentlich verbessern, so dass das Verhalten der Funktionale aus einem endlichdimensionalen Unterraum von X' unter den Operatoren T unverändert bleibt.

Theorem 3.8 (Johnson et al. (1971, Abschnitt 3))**.** *Seien X ein Banachraum, $E \subseteq X''$ und $F \subseteq X'$ endlichdimensionale Unterräume sowie $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein Operator $T\colon E \to X$ mit $\|T\|\|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$, der $(T \circ i_X)(x) = x$ für alle $x \in X$ mit $i_X(x) \in E$ und $x''(x') = x'(Tx'')$ für alle $x' \in F$, $x'' \in E$ erfüllt.*

Einen elementaren Beweis findet man z. B. bei Martínez-Abejón (1999, Theorem 2).

Bemerkung 3.9. Ein Operator T, der $\|T\|\|T^{-1}\| < 1+\varepsilon$ erfüllt, wird ε-Isometrie genannt. Für die Operatoren aus Theorem 3.8 bedeutet das insbesondere

$$1 - \varepsilon \leq \|Tz''\| \leq 1 + \varepsilon \quad \text{für alle } z'' \in S_E.$$

Betrachten wir nämlich ein $x \in S_X$ mit $i_X(x) \in S_E$, das es o. E. gibt, so gilt

$$\|(T \circ i_X)x\| = \|x\| = \|i_X(x)\|,$$

also $\|T\| \geq 1$ bzw. $\|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$ und andererseits

$$\|T^{-1}x\| = \|(T^{-1} \circ T)\big(i_X(x)\big)\| = \|x\|,$$

also $\|T^{-1}\| \geq 1$ bzw. $\|T\| \leq 1 + \varepsilon$, weshalb wir für $z'' \in S_E$ wie gewünscht

$$1 - \varepsilon \leq \frac{1}{1+\varepsilon} \leq \|Tz''\| \leq 1 + \varepsilon$$

erhalten.

Damit lässt sich Satz 3.6 auf M-Ideale verallgemeinern.

Theorem 3.10. *Ist X M-Ideal in einem üppigen Raum Z, so ist X üppig.*

Beweis. Seien u, $v \in S_X$ und $\varepsilon \in (0,1)$ beliebig. Nach Voraussetzung existieren ein Funktional $z' \in S_{Z'}$ mit $u \in S(B_Z, z', \varepsilon/2)$ und eine Absolutkonvexkombination von Punkten $z_1, \dots, z_n \in S(B_Z, z', \varepsilon/2)$ mit zugehörigen Skalaren $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{K}$, die

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \theta_k z_k - v \right\| < \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} |\theta_k| \leq 1$$

erfüllt. Des Weiteren gilt $Z'' = X^{\perp\perp} \oplus_\infty M$ für einen geeigneten Unterraum $M \subseteq Z''$. Ist $k \in \{1, \dots, n\}$ beliebig, gibt es also eine Zerlegung $i_Z(z_k) = x_k'' + y_k''$ mit $x_k'' \in X^{\perp\perp}$ und $y_k'' \in M$. Wegen

$$\operatorname{Re}\bigl(i_{Z'}(z')\bigr)\bigl(i_Z(u)\bigr) = \operatorname{Re} z'(u) > 1 - \varepsilon/2$$

können wir Lemma 3.5 auf $i_{Z'}(z')$ anwenden, um

$$|y''(z')| \leq \varepsilon/2 \quad \text{für alle } y'' \in S_M$$

zu erhalten. Für x_k'' gilt nun

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} x_k''(z') &= \operatorname{Re} z'(z_k) - \operatorname{Re} y_k''(z') \\ &> 1 - \varepsilon/2 - \varepsilon \|y_k''\|/2 \\ &\geq 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

insbesondere also

$$1 - \varepsilon \leq \|x_k''\| \leq \|z_k\| = 1.$$

Wir bemerken noch

$$\begin{aligned} \varepsilon/2 &> \left\| \sum_{k=1}^{n} \theta_k z_k - v \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{n} \theta_k i_Z(z_k) - i_Z(v) \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{n} \theta_k y_k'' + \sum_{k=1}^{n} \theta_k x_k'' - i_Z(v) \right\| \\ &= \max\left\{ \left\| \sum_{k=1}^{n} \theta_k y_k'' \right\|, \left\| \sum_{k=1}^{n} \theta_k x_k'' - i_Z(v) \right\| \right\}. \end{aligned}$$

Nach Megginson (1998, Proposition 1.11.14) lassen sich $X^{\perp\perp}$ und X'' identifizieren. Die Funktionale x_k'' erfüllen also die Üppigkeitsbedingung für $i_X(u)$ und $i_X(v)$ auf X''.

Indem wir $E := \operatorname{lin}\{x_1'', \dots, x_n'', i_Z(v)\}$ setzen, erhalten wir einen endlichdimensionalen Unterraum von X'', und das Prinzip der lokalen Reflexivität liefert einen Operator $T\colon E \to X$ mit

- $(T \circ i_X)x = x$ für alle $x \in X$ mit $i_X(x) \in E$,
- $z'(Tz'') = z''(z')$ für $z'' \in E$ und
- $1 - \varepsilon/2 \leq \|Tz''\| \leq 1 + \varepsilon/2$ für $z'' \in S_E$ (nach Bemerkung 3.9).

Damit können wir die x_k'' auf X projizieren und relevante Struktur im Wesentlichen erhalten. Betrachten wir also die $x_k := Tx_k'' \in X$, so ist

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^n \theta_k x_k - v\right\| &= \left\|\sum_{k=1}^n \theta_k T x_k'' - (T \circ i_Z)v\right\| \\ &\leq (1 + \varepsilon/2)\left\|\sum_{k=1}^n \theta_k x_k'' - i_Z(v)\right\| \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

und $\operatorname{Re} z'(x_k) = \operatorname{Re} x_k''(z') > 1 - \varepsilon$. Es bleibt noch zu normieren, wir setzen dazu weiter $\tilde{x}_k := x_k/\|x_k\|$ und erhalten

$$\begin{aligned}\|x_k - \tilde{x}_k\| &= |\|x_k\| - 1| \\ &\leq |\|x_k\| - \|x_k''\|| + |\|x_k''\| - 1| \\ &\leq |\|Tx_k''\| - \|x_k''\|| + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon\|x_k''\|/2 + \varepsilon/2 \\ &\leq \varepsilon,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^n \theta_k \tilde{x}_k - v\right\| &\leq \left\|\sum_{k=1}^n \theta_k (x_k - \tilde{x}_k)\right\| + \left\|\sum_{k=1}^n \theta_k x_k - v\right\| \\ &\leq \max_{k \leq n} \|x_k - \tilde{x}_k\| + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} z'(\tilde{x}_k) &= \operatorname{Re} z'(x_k) - \operatorname{Re} z'(x_k - \tilde{x}_k) \\ &\geq \operatorname{Re} z'(x_k) - \|x_k - \tilde{x}_k\| \\ &> 1 - 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. □

3.4 Übertragung auf L-Summanden

Auf L-Summanden können wir keine Zerlegung wie in Lemma 3.5 für M-Summanden konstruieren; das geht schon aus dem Fall $Z = \ell^1(2)$ hervor. Wir kommen jedoch auch ohne sie aus. Die Idee ist diesmal, den komplementären Anteil y_k der z_k durch Elemente $\xi_k \in X$ zu ersetzen, auf denen das Funktional z' normnahe Werte annimmt, deren Absolutkonvexkombination jedoch im Wesentlichen verschwindet. Die ξ_k können dabei als Vielfache von u gewählt werden.

Theorem 3.11. *Ist X L-Summand in einem üppigen Raum Z, so ist X üppig.*

Beweis. Seien $u, v \in S_X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Weil Z üppig ist, existieren zu $\eta > 0$ ein Funktional $z' \in S_{Z'}$ mit $u \in S(B_Z, z', \eta)$ sowie Punkte $z_1, \dots, z_n \in S(B_Z, z', \eta)$ und Skalare $\theta_1, \dots, \theta_n$ mit $\sum_{k=1}^n |\theta_k| \le 1$, die $\|\sum_{k=1}^n \theta_k z_k - v\| < \eta$ erfüllen. Sei P die L-Projektion auf X. Wir setzen $x_k := P z_k$, $y_k := z_k - x_k$ und erhalten

$$\left\|\sum_{k=1}^n \theta_k z_k - v\right\| = \left\|\sum_{k=1}^n \theta_k x_k + \sum_{k=1}^n \theta_k y_k - v\right\| = \left\|\sum_{k=1}^n \theta_k x_k - v\right\| + \left\|\sum_{k=1}^n \theta_k y_k\right\|$$

sowie insbesondere $\|\sum_{k=1}^n \theta_k x_k - v\| < \eta$ und $\|\sum_{k=1}^n \theta_k y_k\| < \eta$. Wir beobachten außerdem

$$1 - \eta < \operatorname{Re} z'(z_k) \le \operatorname{Re} z'(x_k) + \|y_k\| < \operatorname{Re} z'(x_k) + \frac{\operatorname{Re} z'(u)}{1-\eta}\|y_k\|,$$

indem wir

$$\xi_k := \frac{\|y_k\|}{1-\eta} u \quad \text{und} \quad \tilde{x}_k := x_k + \xi_k$$

setzen also $1 - \eta < \operatorname{Re} z'(\tilde{x}_k)$ und nach Konstruktion $1 - \eta < \|\tilde{x}_k\| \le 1/(1-\eta)$. Setzen wir weiter $\delta_k := \|y_k\| - \operatorname{Re} z'(y_k)$, erhalten wir wegen $z_k \in S(B_z, z', \eta)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z'(y_k) &= \operatorname{Re} z'(z_k) - \operatorname{Re} z'(x_k) \\ &\ge 1 - \eta - \operatorname{Re} z'(x_k) \\ &\ge 1 - \eta - \|x_k\| \\ &= \|y_k\| - \eta, \end{aligned}$$

also $|\delta_k| \le \eta$. Ist nun $\|y_k\| \ge \eta$, so folgt offenbar

$$\begin{aligned} \big(\operatorname{Im} z'(y_k)\big)^2 &\le (\operatorname{Re} z'(y_k))^2 + (\operatorname{Im} z'(y_k))^2 - (\|y_k\| - \eta)^2 \\ &= |z'(y_k)|^2 - \|y_k\|^2 + 2\|y_k\|\eta - \eta^2 \\ &\le 2\|y_k\|\eta - \eta^2 \\ &< 2\|y_k\|\eta \end{aligned}$$

und auch andernfalls trivialerweise

$$\big(\operatorname{Im} z'(y_k)\big)^2 \le 2\|y_k\|\eta.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\theta_k \operatorname{Re} z'(y_k)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\theta_k z'(y_k) - i\sum_{k=1}^{n}\theta_k \operatorname{Im} z'(y_k)\right| \\ &\le \left\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k y_k\right\| + \max_{k\le n}\left|\operatorname{Im} z'(y_k)\right| \\ &\le \eta + \max_{k\le n}\sqrt{2\|y_k\|\eta} \\ &\le \eta + 2\sqrt{\eta}\end{aligned}$$

sowie offenbar

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k \xi_k\right\| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\theta_k \frac{\|y_k\|}{1-\eta}\right| \\ &\le 2\left|\sum_{k=1}^{n}\theta_k\|y_k\|\right| \\ &\le 2\left|\sum_{k=1}^{n}\theta_k \operatorname{Re} z'(y_k)\right| + 2\left|\sum_{k=1}^{n}\theta_k\delta_k\right| \\ &\le 2\eta + 4\sqrt{\eta} + 2\eta \\ &= 4\eta + 4\sqrt{\eta}\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k \tilde{x}_k - v\right\| &= \left\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k\left(x_k + \xi_k\right) - v\right\| \\ &\le \left\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k x_k - v\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k\xi_k\right\| \\ &\le \eta + 4\eta + 4\sqrt{\eta} \\ &= 5\eta + 4\sqrt{\eta}.\end{aligned}$$

Indem wir die $\tilde{x}_k$ noch normieren, also $\hat{x}_k := 1/\|\tilde{x}_k\|\tilde{x}_k$ setzen, erhalten wir schließlich

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k(\hat{x}_k - \tilde{x}_k)\right\| = \sum_{k=1}^{n}|\theta_k|\big|1 - \|\tilde{x}_k\|\big| \le 2\eta\sum_{k=1}^{n}|\theta_k| \le 2\eta,$$

und insgesamt

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k\hat{x}_k - v\right\| \le \left\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k(\hat{x}_k - \tilde{x}_k)\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{n}\theta_k\tilde{x}_k - v\right\| \le 7\eta + 4\sqrt{\eta}.$$

Wählen wir η zu Anfang klein genug, gilt sowohl $7\eta + 4\sqrt{\eta} < \varepsilon$ als auch $2\eta < \varepsilon$. Dann ist wegen

$$\operatorname{Re} z'(\hat{x}_k) > (1-\eta) \operatorname{Re} z'(\tilde{x}_k) > (1-\eta)^2 \geq 1 - 2\eta > 1 - \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, n\}$$

auch wie gewünscht

$$\operatorname{dist}(v, \operatorname{co}(\mathbb{T}\, S(B_X, z', \varepsilon))) < \varepsilon. \qquad \square$$

3.5 Zusammenfassung

Wir haben in Abschnitt 3.2 bemerkt, dass sich numerischer Index Eins und CL-Nähe (nicht notwendigerweise endlicher) Summen auf jeden Summanden übertragen, um in den folgenden Abschnitten dann die Verträglichkeit der Üppigkeit mit solchen Zerlegungen nachzuweisen.

Betrachten wir umgekehrt eine Folge von Banachräumen X_n, so übertragen sich CL-Nähe (Martín und Payá, 2004, Proposition 8 & 9), Üppigkeit (Boyko et al., 2009, Proposition 5.3) und numerischer Index Eins (Martín und Payá, 2000, Proposition 1) von allen X_n auf ihre c_0- und ihre ℓ^1-Summe. Es gilt also folgende Äquivalenz.

Satz 3.12. *Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Banachräumen und E eine der drei Eigenschaften, numerischen Index Eins zu haben, üppig oder CL-nah zu sein, so sind äquivalent:*

(i) *Alle X_n haben Eigenschaft E,*

(ii) *der Raum $c_0((X_n)_{n\in\mathbb{N}})$ hat Eigenschaft E und*

(iii) *der Raum $\ell^1((X_n)_{n\in\mathbb{N}})$ hat Eigenschaft E.*

Weil der Nullraum jede der genannten Eigenschaften hat, überträgt sich dieses Resultat auf endliche Folgen und speziell auf den Fall zweier Banachräume X_1 und X_2.

Literaturverzeichnis

Abramovich, Yuri A., Charalambos D. Aliprantis und Owen Sidney Burkinshaw. 1991. *The Daugavet equation in uniformly convex Banach spaces*, J. Funct. Anal. **97**, Nr. 1, 215–230, DOI 10.1016/0022-1236(91)90021-V.

Bauer, Friedrich Ludwig. 1962. *On the field of values subordinate to a norm*, Numer. Math. **4**, 103–113.

Bohnenblust, Henri Frédéric und Samuel Karlin. 1955. *Geometrical properties of the unit sphere of Banach algebras*, Ann. of Math. (2) **62**, 217–229.

Bollobás, Béla. 1970. *An extension to the theorem of Bishop and Phelps*, Bull. London Math. Soc. **2**, 181–182.

Boyko, Kostyantyn, Vladimir Kadets, Miguel Martín und Dirk Werner. 2007. *Numerical index of Banach spaces and duality*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **142**, Nr. 1, 93–102, DOI 10.1017/S0305004106009650.

Boyko, Kostyantyn, Vladimir Kadets, Miguel Martín und Javier Merí. 2009. *Properties of lush spaces and applications to Banach spaces with numerical index 1*, Studia Math. **190**, Nr. 2, 117–133, DOI 10.4064/sm190-2-2.

Deimling, Klaus. 1985. *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.

Fullerton, Robert E. 1961. *Geometrical characterizations of certain function spaces*, Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960), Jerusalem Academic Press, Jerusalem, pp. 227–236.

Glickfeld, Barnett W. 1970. *On an inequality of Banach algebra geometry and semi-inner product space theory*, Illinois J. Math. **14**, 76–81.

Godefroy, Gilles. 1987. *Boundaries of a convex set and interpolation sets*, Math. Ann. **277**, Nr. 2, 173–184, DOI 10.1007/BF01457357.

Harmand, Peter, Dirk Werner und Wend Werner. 1993. *M-ideals in Banach spaces and Banach algebras*, Lecture Notes in Mathematics, Bd. 1547, Springer-Verlag, Berlin.

James, Robert C. 1963/1964. *Characterizations of reflexivity*, Studia Math. **23**, 205–216.

Johnson, William Buhmann, Haskell P. Rosenthal und Mordecay Zippin. 1971. *On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces*, Israel J. Math. **9**, 488–506.

Kadets, Vladimir, Miguel Martín und Rafael Payá. 2006. *Recent progress and open questions on the numerical index of Banach spaces*, RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. **100**, Nr. 1-2, 155–182.

Kadets, Vladimir, Miguel Martín, Javier Merí und Varvara Shepelska. 2009. *Lushness, numerical index one and duality*, J. Math. Anal. Appl. **357**, Nr. 1, 15–24, DOI 10.1016/j.jmaa.2009.03.055.

Lima, Åsvald. 1978. *Intersection properties of balls in spaces of compact operators*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **28**, Nr. 3, 35–65.

Lindenstrauss, Joram. 1964. *Extension of compact operators*, Mem. Amer. Math. Soc. No. **48**, 112.

Lindenstrauss, Joram und Haskell P. Rosenthal. 1969. *The $\mathcal{L}_p$ spaces*, Israel J. Math. **7**, 325–349.

Lumer, Günter. 1961. *Semi-inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **100**, 29–43.

Martín, Miguel und Rafael Payá. 2000. *Numerical index of vector-valued function spaces*, Studia Math. **142**, Nr. 3, 269–280.

Martín, Miguel. 2000. *A survey on the numerical index of a Banach space*, Extracta Math. **15**, Nr. 2, 265–276. III Congress on Banach Spaces (Jarandilla de la Vera, 1998).

Martín, Miguel und Rafael Payá. 2004. *On CL-spaces and almost CL-spaces*, Ark. Mat. **42**, Nr. 1, 107–118.

Martín, Miguel und Timur Oikhberg. 2004. *An alternative Daugavet property*, J. Math. Anal. Appl. **294**, Nr. 1, 158–180, DOI 10.1016/j.jmaa.2004.02.006.

Martín, Miguel und Javier Merí. 2007. *Numerical index of some polyhedral norms on the plane*, Linear Multilinear Algebra **55**, Nr. 2, 175–190, DOI 10.1080/03081080600628323.

Martínez-Abejón, Antonio. 1999. *An elementary proof of the principle of local reflexivity*, Proc. Amer. Math. Soc. **127**, Nr. 5, 1397–1398, DOI 10.1090/S0002-9939-99-04687-0.

McGregor, Colin M. 1971. *Finite-dimensional normed linear spaces with numerical index* 1, J. London Math. Soc. (2) **3**, 717–721.

Megginson, Robert E. 1998. *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Bd. 183, Springer-Verlag, New York.

Söderlind, Gustaf. 2006. *The logarithmic norm. History and modern theory*, BIT **46**, Nr. 3, 631–652, DOI 10.1007/s10543-006-0069-9.

Toeplitz, Otto. 1918. *Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér*, Math. Z. **2**, Nr. 1-2, 187–197, DOI 10.1007/BF01212904.

Werner, Dirk. 2007. *Funktionalanalysis*, sechste, korrigierte Auflage, Springer-Verlag, Berlin.